МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2022–2023 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 6 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.
2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.
3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.
4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.
5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.
6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 35 баллов.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

6.1. Валера считает, что два арбуза тяжелее трех дынь, а Серёжа — что три арбуза тяжелее четырёх дынь. Известно, что один мальчик прав, а второй — нет. Верно ли, что 12 арбузов тяжелее 18 дынь? Считается, что все арбузы весят одинаково, и все дыни тоже весят одинаково. Ответ обоснуйте.

6.2. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли участок зала площадью 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то они в два слоя накрыли участок зала площадью 14 м^2. Каковы размеры зала? Ответ обоснуйте.

6.3. У Вики было четыре ромашки: с 31 лепестком, с 32 лепестками, с 33 лепестками и с 34 лепестками. Она оборвала 20 лепестков. Могло ли получиться так, что количество лепестков на ромашках стало равным? Ответ обоснуйте.

6.4. В таблицу 3×3 расставили 9 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 20. Затем перемножили числа в каждой строке и в каждом столбце. Могло ли оказаться, что все шесть таких произведений — квадраты натуральных чисел (не обязательно различных)? Ответ обоснуйте.

6.5. У фальшивомонетчика 100 внешне одинаковых монет, среди которых ровно 2 фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая из фальшивых на 1 грамм легче каждой из настоящих. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах отобрать

а) 25 настоящих монет;

б) 33 настоящие монеты?

7.1. Женя и Антон учатся в одном классе. У Антона одноклассников вчетверо больше, чем одноклассниц. А у Жени одноклассниц на 17 меньше, чем одноклассников. Кто Женя: девочка или мальчик? Ответ обоснуйте.

7.2. Учебник стоит целое число рублей, кратное 10. Первому школьнику не хватает 10 рублей для покупки учебника, второму — 20 рублей, и так до десятого, которому не хватает 100 рублей. Тогда они решили сложить все деньги и купить хотя бы 5 учебников. Но и тогда денег не хватило. Сколько стоит учебник?

7.3. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить отрезками первую точку со второй, вторую — с третьей и т. д., а шестую — с первой, то каждый из шести проведённых отрезков пересекает (во внутренней точке) ровно один другой отрезок.

7.4. а) Покажите, что каждое из чисел $3 \cdot 0^2 + 14 = 14$ и $3 \cdot 1^4 + 14 = 17$ может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел.

б) Верно ли, что для любого целого числа n число $3n^4 + 14$ может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел? Ответ обоснуйте.

7.5. У дракона есть 40 кучек золотых монет, в любых двух кучках число монет разное. После того, как дракон разграбил соседний город и принес ещё золотых монет, количество монет в каждой кучке увеличилось либо в 2, либо в 3, либо в 4 раза. Какое наименьшее количество разных (по количеству монет) кучек могло получиться? Ответ обоснуйте.

7.6. В мешке лежат карточки с четырьмя буквами А, Т, О, М, по одной букве на карточке. Общее количество карточек 26. Известно, что карточек с буквой Т меньше, чем с буквой О, а карточек с буквой О меньше, чем с буквой М. Из мешка не глядя извлекают несколько карточек и из букв на извлечённых карточках составляют слова. Чтобы гарантированно можно было собрать слово «АТОМ», нужно вытащить минимум 22 карточки; чтобы слово «ТОМ» — 21 карточку, а чтобы слово «ОМ» — 20 карточек. Сколько карточек каждого вида в мешке? Ответ обоснуйте.

8.1. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем — пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором все это было? Ответ обоснуйте.

8.2. В финале первенства Университета по игре в «Брэйн-ринг» приняли участие 4 команды. По правилам каждая команда сыграла с каждой дважды, за победу в бою начислялось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Известно, что команда «Крестики» набрала очков больше, чем любая другая команда, а именно 7. А у команды «Нолики» очков меньше всех. А сколько именно? Приведите все варианты ответа и докажите что других нет.

8.3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAD = \angle ADC = 60°$ и $\angle BAC = \angle BDA$. Найдите длину AD, если известно, что $AB = 14$, $CD = 6$.

8.4. Пусть

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = \frac{3}{2}.$$

Какие значения может принимать сумма

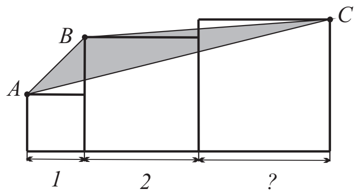
$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}?$$

Ответ обоснуйте.

8.5. Дано 10 натуральных чисел. Из десяти всевозможных сумм по 9 чисел различных всего девять: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. Найдите эти числа. Приведите все возможные наборы и докажите, что других нет.

8.6. Серёжа коллекционирует игрушечные железные дороги. У него есть несколько наборов, в каждом из которых разное количество вагонов. Если все его наборы объединить в один состав, то в нем будет 112 вагонов. Если взять три самых маленьких набора, то в них будет 25 вагонов, а в трёх самых больших — 50 вагонов. Сколько наборов у Серёжи? Сколько вагонов в самом большом наборе? Ответы обоснуйте.

9.1. По вазам разложили 60 яблок и 60 персиков так, что во всех вазах оказалось поровну яблок, но в любых двух вазах — разное число персиков (возможно, что в одной из ваз персиков нет совсем). Какое наибольшее число ваз могло быть использовано? Ответ обоснуйте.



К условию задачи 9.2

9.2. На плоскости расположено три квадрата так, как указано на рисунке. Длина стороны левого квадрата равна 1 см, длина стороны среднего — 2 см, о длине стороны правого квадрата ничего неизвестно. Докажите, что площадь треугольника ABC не зависит от размера правого квадрата и найдите её.

9.3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \leqslant 1, \\ 2x - 5y \geqslant 2. \end{cases}$$

9.4. Из точки A за пределами окружности проведены к ней две касательные AB и AC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и AC, не пересекает эту окружность.

9.5. Проезжая в автобусе мимо кинотеатра, ученик успел заметить только часы (но не минуты) начала четырёх сеансов: 1-й сеанс: 11 часов ... минут, 2-й сеанс: 12 часов ... минут, 7-й сеанс: 22 часа ... минут, 8-й сеанс: 23 часа ... минут. Определите самое позднее возможное время начала первого сеанса, если известно, что сеансы идут без перерывов и начинаются в целое число минут соответствующего часа. Предполагается, что продолжительность каждого из восьми сеансов одинакова.

9.6. Вычислите без калькулятора

$$\frac{(10^4+324)\cdot(22^4+324)\cdot(34^4+324)\cdot(46^4+324)\cdot(58^4+324)}{(4^4+324)\cdot(16^4+324)\cdot(28^4+324)\cdot(40^4+324)\cdot(52^4+324)}.$$

10.1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q-1)^2$ — составное.

10.2. Из точки A, лежащей за пределами окружности ω, проведены две касательные к этой окружности; B и C — точки касания. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности ω.

10.3. Для каждого натурального числа $n > 2$ (n — параметр) решите уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1).$$

10.4. Вдоль правой стороны аллеи посажены в ряд яблони и груши. Аня, Боря, Вера и Гена прошли всю аллею (в одном и том же направлении). Аня сосчитала сколько раз за яблоней следует груша — у неё получилось 16 раз. Боря сосчитал, сколько раз за грушей следует яблоня, и получил число 15. Вера сосчитала все тройки подряд стоящих деревьев, в которых груша расположена между двумя яблонями, таких троек оказалось 8. А Гена сосчитал число яблонь, перед которыми растут хотя бы две груши, но не сказал, сколько у него получилось. Впрочем, ребята и без слов Гены смогли определить количество таких яблонь. Сделайте это и Вы.

10.5. Тридцать пять шариков массой 1 г, 2 г, $\ldots$, 35 г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Затем один шарик из второй коробки переложили в первую. После этого среднее арифметическое масс всех шариков в первой коробке увеличилось на 4 г. Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке? Ответ обоснуйте.

10.6. Дана выпуклый многоугольник Φ на плоскости и точка M внутри него. Из прямых, проходящих через M, выбрали такую, что разность площадей фигур, на которые эта прямая делит многоугольник Φ, максимальна — прямую l. Докажите, что M — середина отрезка XY, где X и Y — точки пересечения l с периметром фигуры.

11.1. Лесной массив имеет форму правильного треугольника со стороной 6 км. Он разделён просеками, параллельными границам массива, на 36 одинаковых треугольных участков со стороной 1 км (шириной просек пренебрегаем). Лесник утверждает, что в массиве растёт ровно 2022 берёзы, при этом для любых двух участков, разделённых километровым участком просеки, количество берёз в одном из них ровно на одну больше количества берёз в другом. Докажите, что лесник ошибается. Известно, что на просеках берёзы не растут.

11.2. Серёжа разрезал выпуклый 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом по другой прямой разрезал один из получившихся многоугольников, затем — один из трех получившихся и так далее. В итоге у него получилось восемь n-угольников. Найдите все возможные значения n.

11.3. Найдите наименьшее значение положительной константы C, чтобы неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{(x+C)(y+C)}$$

выполнялось для всех неотрицательных чисел x и y. Ответ обоснуйте.

11.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Из точки D проведен перпендикуляр к AC. Пусть точка N — основание этого перпендикуляра и точка M — середина AB. Найдите угол NMB.

11.5. Последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$ такова, что

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ при всех } n \geq 1.$$

Найдите a_{300}. Ответ обоснуйте.

11.6. По кругу написаны m чисел таким образом, что каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовем число *сильным*, если оба его соседа меньше него, и *слабым*, если оба его соседа больше него. Обозначим сумму сильных чисел через S, а сумму слабых чисел — через s. Докажите, что $m = 2(S - s)$.