

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2022–2023 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 11 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признаётся решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

11.1. Лесной массив имеет форму правильного треугольника со стороной 6 км. Он разделён просеками, параллельными границам массива, на 36 одинаковых треугольных участков со стороной 1 км (шириной просек пренебрегаем). Лесник утверждает, что в массиве растёт ровно 2022 берёзы, при этом для любых двух участков, разделённых километровым участком просеки, количество берёз в одном из них ровно на одну больше количества берёз в другом. Докажите, что лесник ошибается. Известно, что на просеках берёзы не растут.

11.2. Серёжа разрезал выпуклый 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом по другой прямой разрезал один из получившихся многоугольников, затем — один из трех получившихся и так далее. В итоге у него получилось восемь n -угольников. Найдите все возможные значения n .

11.3. Найдите наименьшее значение положительной константы C , чтобы неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(x+C)(y+C)}$$

выполнялось для всех неотрицательных чисел x и y . Ответ обоснуйте.

11.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Из точки D проведен перпендикуляр к AC . Пусть точка N — основание этого перпендикуляра и точка M — середина AB . Найдите угол NMB .

11.5. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ такова, что

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ при всех } n \geq 1.$$

Найдите a_{300} . Ответ обоснуйте.

11.6. По кругу написаны m чисел таким образом, что каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовем число *сильным*, если оба его соседа меньше него, и *слабым*, если оба его соседа больше него. Обозначим сумму сильных чисел через S , а сумму слабых чисел — через s . Докажите, что $m = 2(S - s)$.